大阪公立大学
Osaka Metropolitan University
学術情報リポジトリ

落体法による粘度測定の一考察

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 公開日: 2013-11-12 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 柳井田, 勝哉, 杉野, 英太郎, 藤原, 徳一 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.24729/00007990

落体法による粘度測定の一考察*

A Consideration on the Falling Cylinder Viscometer

柳井田勝哉**，杉野英太郎**，藤原　徳一**
Katsuya YANAIDA, Eitaro SUGINO, Tokuichi FUJIWARA

（昭和59年4月18日受理）

ABSTRACT

This report is concerned with the effects of cylinder/pipe diameter ratio, cylinder length/diameter ratio and cylinder specific gravity on the drag coefficient of the falling cylinder viscometer. For the purpose of obtaining considerably good falling cylinder viscometer, a characteristics number $\bar{l}/(1/\bar{d}-1)^2$ Rem can be proved for the drag coefficient of the falling cylinder viscometer. Where $\bar{l}$ is the cylinder length/diameter ratio, $\bar{d}$ the cylinder/pipe diameter ratio and Reynolds number Rem ; Rem=Usm•d/ν in which Usm is the superficial mean velocity of the flow hindered settling cylinder, d the diameter of cylinder and ν the kinematic viscosity of the liquid.

記　号

B	：円柱の浮力	〔kgf〕	Rem	：レイノルズ数 Usm•d/ν	〔－〕
Cds	：円柱の干渉沈降抗力係数	〔－〕	u	：流体の速度	〔m/sec〕
D	：円筒状容器の内径	〔m〕	Us	：円柱の干渉沈降速度	〔m/sec〕
d	：円柱の外径	〔m〕	Usm	：干渉沈降における二重管内の流体の平均速度	〔m/sec〕
$\bar{d}$	：直径比 d/D	〔－〕	W	：円柱の重量	〔kgf〕
K	：直径比 D/d	〔－〕	z	：軸方向の座標	〔m〕
F	：せん断力	〔kgf〕	$C\tau$	：無次元せん断力	〔－〕
l	：円柱の長さ	〔m〕	Cp	：圧力変化の無次元量	〔－〕
$\bar{l}$	：円柱の無次元長さ	〔－〕	μ	：流体の粘性係数	〔kg•sec/m²〕
P_0	：円柱上流の管内圧力	〔kgf/m²〕	ν	：流体の動粘性係数	〔m²/sec〕
P_1	：円柱前縁での圧力	〔kgf/m²〕	ρ	：流体の密度	〔kg•sec²/m⁴〕
P_2	：円柱後縁での圧力	〔kgf/m²〕	$\bar{\rho}$	：流体と円柱の密度比 ρ_c/ρ	〔－〕
Q	：体積流量	〔m³/sec〕	ρ_c	：円柱の密度	〔kg•sec²/m⁴〕
r	：半径方向座標	〔m〕	τ_c	：円柱に作用するせん断力	〔kgf/m⁴〕
Rc	：円柱の直径	〔m〕			

1. 緒　　論

液体の粘性はいろいろな方法により調べられる。それらのうちのひとつに落体法があり，種

* 本研究の一部は，第4回フレイトパイプライン国際シンポジウム（アトランティック市，アメリカ，10月，1982）で発表。

** 機械工学科（Department of Mechanical Engineering）

々の粘度計が考案作成され実用に供されている。落体式粘度計は，落球法・転落球法・円柱落下法と段階的に発展してきた。落円柱法は，落球法の円筒状容器の側壁効果を，積極的に利用し，供試液体の量を減少させ実用化したものである。この方法では，落下円柱の中心軸が円筒状容器の中心軸上を落下しなければならない。この条件を満たすのが困難で，これが落円柱法の誤差の原因となっている。実際の粘度測定では，径の異なるいくつかの円柱が用意されていて，これらのうち適当なものを用いることにより広い範囲の粘度測定ができるようになっている[1]。すなわち，落円柱法では円柱の径の選択，いいかえれば円柱と円筒状容器の直径比の選択が必要となり，現状ではこの選択は経験や試行錯誤にたよっている。

本研究では，円筒状容器と落円柱とのすきまの流れを理論的に取扱い，円柱の抗力係数と流体の粘度とを結びつけ落円柱法における直径比の選択について何らかの指針を与えようとするものである。

2. 理　　論

Happel と Brenner[2] は長い円柱棒が流体で満されている垂直管内を沈降する場合について流れの解析を行っているが，本研究では短い円柱棒が垂直管内を干渉する場合について考える。このような流れを解析するために **Fig. 1** のようなモデルを考える。図に示されているように，円柱は流体で満たされた垂直管内を自重により一定の速度で干渉沈降し，円柱の前縁と後縁との間に圧力差を生じる。したがって，円柱と管壁との間隙に流れが生じ，この流れを層流と仮定する。このような二重管内流れに対し，次のような Navier-Stokes の方程式が与えられる。

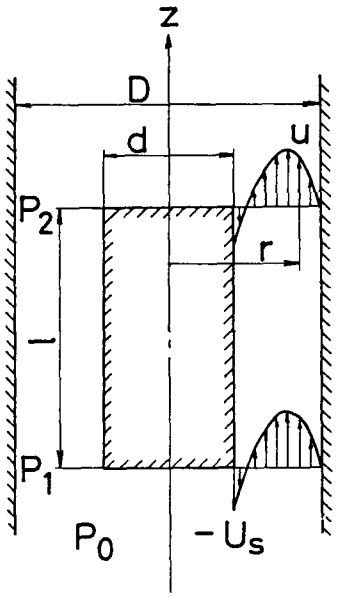

Fig. 1 Flow patterns around the falling cylinder

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz} \tag{1}$$

干渉沈降の場合，境界条件として次式が与えられる。

$$r=D/2 \quad で \quad u=0 \tag{2}$$

$$r=d/2 \quad で \quad u=-Us \tag{3}$$

(1)式を積分し，(2)式および(3)式の境界条件を用いると次式が得られる。

$$\frac{du}{dr}=-\frac{(P_1-P_2)}{2l\mu}r+\frac{Us+(P_1-P_2)(D^2-d^2)/16l\mu}{r\ln(D/d)} \tag{4}$$

$$u(r)=\frac{(P_1-P_2)}{16l\mu}(D^2-4r^2)-\frac{U_s+(P_1-P_2)(D^2-d^2)/16l\mu}{\ln(D/d)}\ln\left(\frac{D}{2r}\right) \tag{5}$$

円柱が干渉沈降する間，円柱と管壁との間隙を流れる流量は次のようになる。

$$\begin{aligned}Q&=\int_0^{2\pi}\int_{d/2}^{D/2}u(r)rdrd\theta\\&=\pi Us\left(\frac{d}{2}\right)^2-\frac{\pi U_s(D^2-d^2)}{8\ln(D/d)}+\frac{\pi(P_1-P_2)}{128l\mu}\left[\left(D^4-d^4\right)-\frac{(D^2-d^2)^2}{\ln(D/d)}\right]\end{aligned} \tag{6}$$

さらに，円柱と管壁との間隙を流れる平均速度は次式で与えられる。

$$Usm=\frac{4Q}{\pi(D^2-d^2)} \tag{7}$$

また，流量Qは円柱が単位時間に排除する量として次式で表わされる。

$$Q=\frac{\pi}{4}d^2U_s \tag{8}$$

(8)式を(7)式に代入すると，円柱と管壁との間隙を流れる平均速度と円柱の干渉沈降速度との関係が得られる。

$$Usm=\frac{Us}{K^2-1} \tag{9}$$

(7)式に(6)式を代入すると次式が得られる。

$$Usm=Us\left(\frac{1}{K^2-1}-\frac{1}{2\ln K}\right)+\frac{(P_1-P_2)d^2}{32l\mu}\left[\left(K^2+1\right)-\frac{K^2-1}{\ln K}\right] \tag{10}$$

さらに，(9)式から　$Us=(K^2-1)Usm$　とし，これを(10)に代入すると

$$Usm=\frac{(P_1-P_2)d^2[(K^2+1)-(K^2-1)/\ln K]}{16l\mu(K^2-1)}\ln K \tag{11}$$

一方，円柱は圧力・せん断力・浮力および重力によるつり合いのもと，一定の速度で沈降するものとすれば次式が与えられる。

$$W-B=\left(P_0-P_2\right)\frac{\pi}{4}d^2+\int_0^l \pi d\tau_c dx \tag{12}$$

また，円柱の抗力係数は次式のように定義される。

$$Cds=\frac{W-B}{\frac{1}{2}\rho Usm^2\cdot\frac{\pi}{4}d^2} \tag{13}$$

したがって，(11)式の右辺の圧力項とせん断力項を無次元量で表わすことにより円柱の抗力係数が得られる。

せん断力を無次元量 C_τ で表わすと次のようになる。

$$C\tau=\frac{\int_0^l \pi d\tau_c dx}{\frac{1}{2}\rho Usm^2\cdot\frac{\pi}{4}d^2}=\frac{F\cdot l}{\frac{1}{2}\rho Usm^2\cdot\frac{\pi}{4}d^2} \tag{14}$$

(14)式に示されるせん断力Fは次式で表わされる。

$$F=-\pi d\mu\left[\frac{du}{dr}\right]_{r=d/2} \tag{15}$$

(15)式中の $[du/dr]_{r=d/2}$ には(4)式が導入され，(4)式中の Us は(9)式と(11)式より次のようになる。

$$Us=\frac{(P_1-P_2)d^2[(K^2+1)-(K^2-1)/\ln K]}{16l\mu}\ln K \tag{16}$$

したがって，$[du/dr]_{r=d/2}$ は次式のようになる。

$$\left[\frac{du}{dr}\right]_{r=d/2}=-\frac{(P_1-P_2)d}{8l\mu}\left(1-K^2\right) \tag{17}$$

さらに(11)式を用いると(14)式は次のように示される。

$$C\tau=-\frac{16\bar{l}(K^2-1)^2}{Rem[(K^2+1)\ln k-(K^2-1)]} \tag{18}$$

一方，圧力変化の無次元量 Cp について示すと次のようになる。

$$Cp=\frac{P_0-P_2}{\frac{1}{2}\rho Usm^2}=\frac{P_0-P_1}{\frac{1}{2}\rho Usm^2}+\frac{P_1-P_2}{\frac{1}{2}\rho Usm^2} \tag{19}$$

(19)式において，

$$P_0-P_1=\frac{1}{2}\rho Usm^2-\frac{1}{2}\rho Us^2,\ \ U_s{}^2=\left(K^2-1\right)^2 Usm^2$$

とから次式が得られる。

$$\frac{P_0-P_1}{\frac{1}{2}\rho Usm^2}=1-(K^2-1)^2 \tag{20}$$

また，(P_1-P_2) については(11)式から次のように求められる。

$$P_1-P_2=\frac{16l\mu(K^2-1)Usm}{d^2[(K^2+1)-(K^2-1)/\ln K]\ln K} \tag{21}$$

よって，

$$\frac{P_1-P_2}{\frac{1}{2}\rho Usm^2}=\frac{32\bar{l}(K^2-1)}{Rem[(K^2+1)\ln K-(K^2-1)]} \tag{22}$$

(20)式と(22)式より圧力に関する無次元量 Cp については(19)式より次のように示される。

$$Cp=[1-(K^2-1)^2]+\frac{32\bar{l}(K^2-1)}{Rem[(K^2+1)\ln K-(K^2-1)]} \tag{23}$$

したがって，円柱の抗力係数 Cds は(18)式と(23)式の和として次のように求められる。

$$\begin{aligned}Cds&=Cp+C\tau\\&=[1-(K^2-1)^2]+\frac{16\bar{l}(K^2-1)(3-K^2)}{Rem[(K^2+1)\ln K-(K^2-1)]}\end{aligned} \tag{24}$$

(24)式に示されるように円柱の抗力係数 Cds は次のような関数として表わされることがわかる。

$$Cds=f(K,\ \bar{l},\ Rem) \tag{25}$$

3. 結果と考察

ここでは，これまでに発表されている実験結果について本報の理論的な面から検討すること

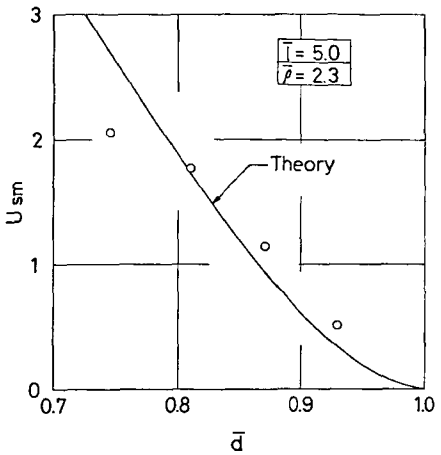

Fig. 2 Variation of Usm with $\bar{d}$ for $\bar{l}=5.0$ and $\bar{\rho}=2.3$

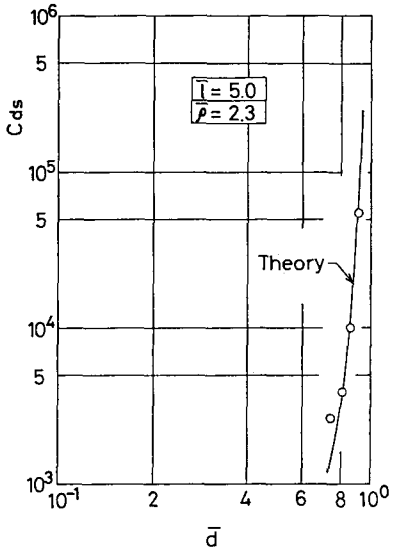

Fig. 3 Variation of Cds with $\bar{d}$ for $\bar{l}$=5.0 and $\bar{\rho}$=2.3

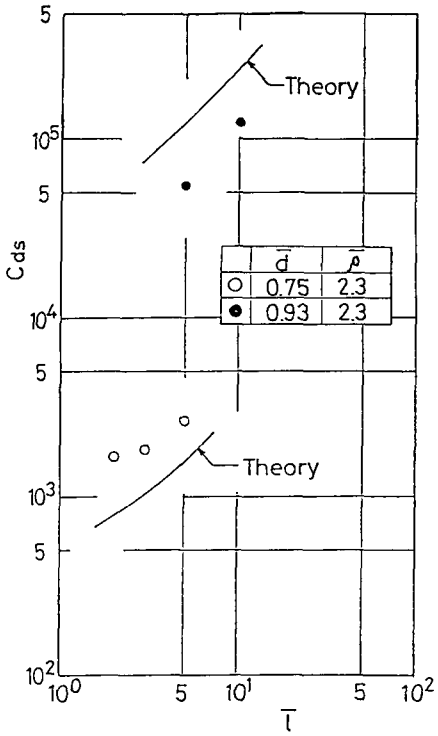

Fig. 4 Variation of Cds with $\bar{l}$ and $\bar{d}$ for $\bar{\rho}$=2.3

にする。**Fig. 2～9** は立花ら[3]の実験結果および本報のシリコンオイルについての実験結果と理論値とを比較して示したものである。

(9)式で示されるように，干渉沈降速度 Us より求められる円柱まわりの干渉沈降速度 Usm と直径比 $\bar{d}$ の関係を **Fig. 2** に示す。図中の実線は(13)式および(25)式より得られる理論式を示している。図より，$\bar{d}<0.8$ では Usm の実験値は理論値より小さい値を示す。また $\bar{d}>0.8$ では実験値は理論値より大となり，$\bar{d}\fallingdotseq 0.8$ で実験値と理論値はよく一致していることがわかる。

Fig. 3 は(13)式の定義より求められる抗力係数 Cds と直径比 $\bar{d}$ の関係をプロットしたものである。図中の実線は(24)式で得られる理論値を示している。図より，$\bar{d}>0.8$ では実験点は理論曲線とよく一致しているが，$\bar{d}<0.8$ では理論値より大きくなることがわかる。

Fig. 4 は縦軸に **Fig. 3** と同様の Cds をとり，横軸に $\bar{l}$ をとって実験点をプロットしたものである。図中の実線は理論値を示す。これより，$\bar{d}=0.75$ では実験値は理論値より常に大きくなることがわかる。逆に，$\bar{d}=0.93$ では実験値は理論値より小さな値をとることがわかる。

Fig. 2～4 を通してわかることは，$\bar{d}$ の値が大きくても小さくても理論値からずれ，$\bar{d}=0.8$ でほぼ理論値と一致することである。これより，$\bar{d}=0.8$ 付近では落下円柱の中心軸と円筒状容器の中心軸との間に偏心がなく，円柱下流に渦が存在しない理想的な流れになっていると考えることができる。また，$\bar{l}$ による影響は実験の範囲内では $\bar{d}$ ほど顕著に表われていないことがわかる。

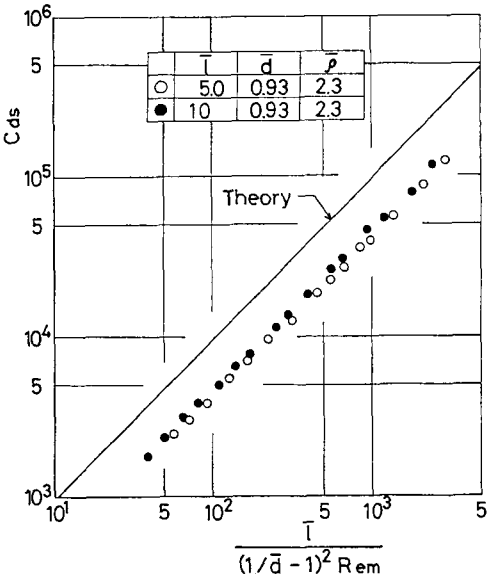

Fig. 5 Variation of Cds with characteristics number for $\bar{d}=0.93$

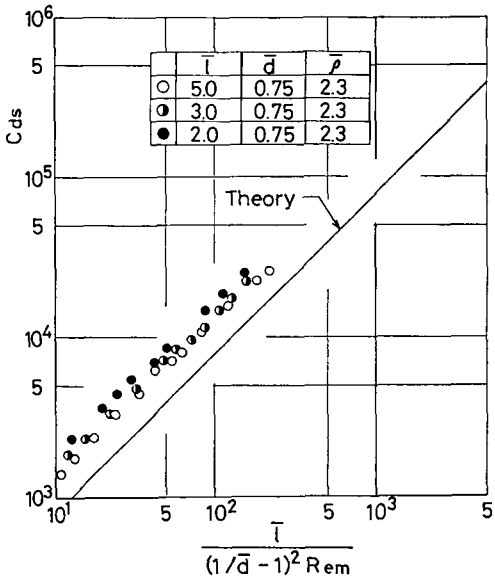

Fig. 6 Variation of Cds with characteristics number for $\bar{d}=0.75$

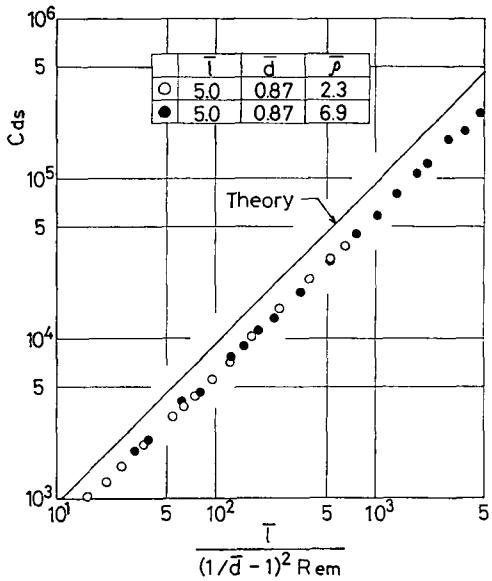

Fig. 7 Variation of Cds with characteristics number for $\bar{d}=0.87$ and $\bar{l}=5.0$

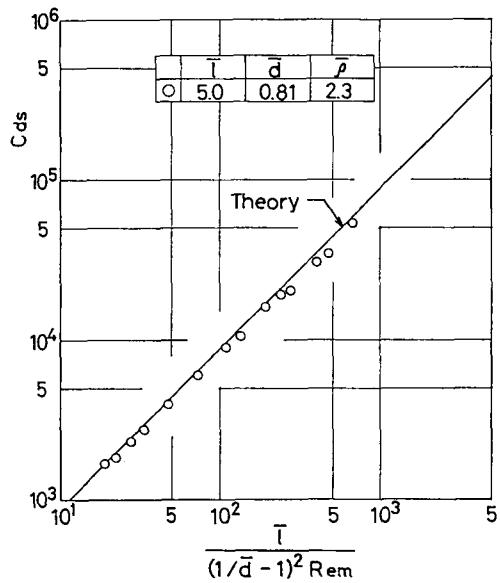

Fig. 8 Variation of Cds with characteristics number for $\bar{d}=0.81$

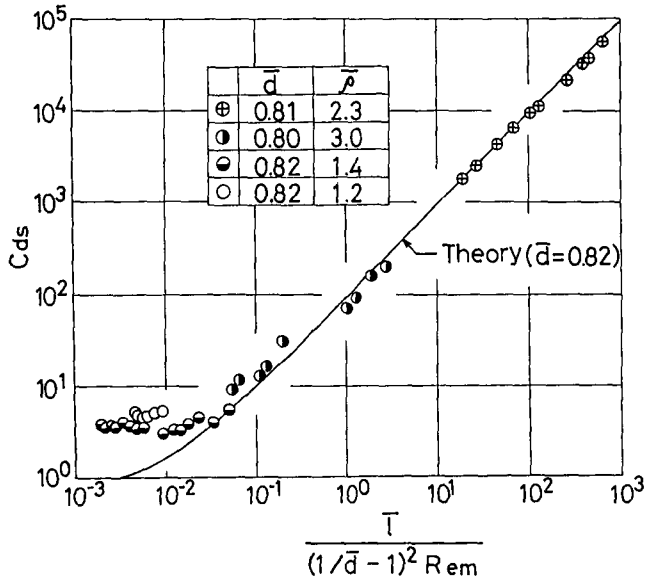

Fig. 9 Variation of Cds with characteristics number with $\bar{d}$ and $\bar{\rho}$ (for wide range of characteristics number)

以上よりわかるように，Usm や Cds は同一流体に対しては $\bar{d}$ や $\bar{l}$ により影響をうけるが，**Fig. 2～4** は $\bar{d}$ や $\bar{l}$ による影響を総合的に判断する資料となりえない。そこで，これらを総合的な因子としてとらえるために特性数[4] の概念を導入することにする。この特性数は，$\bar{d}$, $\bar{l}$, Rem を含む無次元数であり，円筒状容器内を干渉沈降する円柱に対し有効である。

Fig. 5～9 は縦軸に抗力係数 Cds を，横軸に特性数 $\bar{l}/(1/\bar{d}-1)^2$Rem をとり，各実験点をプロットしたものである。図中実線は(24)式で表わされる理論値を示している。

Fig. 5 は $\bar{d}$=0.93, $\bar{l}$=5.0, 1.0 について示してある。実験値は理論値より低い値を示している。また，$\bar{l}$ の値が大きくなると若干 Cds の値が大きくなっている。

Fig. 6 は $\bar{d}$=0.75, $\bar{l}$=2.0, 3.0, 5.0 について示してある。実験値は理論値より大きい値を示し，$\bar{l}$ の値が小さくなると Cds の値が大きくなることがわかる。**Fig. 5**，**Fig. 6** ともに $\bar{l}$ が大きくなると理論値に近づく傾向を示している。

Fig. 7 は $\bar{d}$=0.87, $\bar{l}$=5.0 の場合である。**Fig. 5** と同様の傾向を示すことがわかる。また，$\bar{\rho}$ の影響はこの図より見ることはできない。

Fig. 8 は $\bar{d}$=0.81, $\bar{l}$=5.0, $\bar{\rho}$=2.3 の場合である。図より，実験値と理論値はよく一致していることがわかる。実験データは $\bar{l}$=5.0 についてしか得られなかったため $\bar{l}$ の影響についてはこの図より検討することはできない。しかし，立花ら[5] は直径比 $\bar{d}$ が 0.8 以上になると干渉沈降速度は $\bar{l}$ によらないと報告していることを考慮すると，その影響は小さいまたは無視できると考えられる。

Fig. 5～8 について，実験値と理論値とのずれに対する $\bar{d}$ の影響をみると，$\bar{d}$=0.8 を境にして $\bar{d}$ が大きくても小さくても両者は一致しなくなることがわかる。また，$\bar{l}$ による影響も，$\bar{d}$ の値が 0.8 からずれるに従って大きく表われてくることがわかる。

Fig. 9 は，特性数の値が 10^{-3}～10^3 の広範囲にわたって実験値と理論値を比較したものである。特性数が 10^1～10^3 の範囲は立花らの実験値を，10^{-3}～10^1 の範囲はシリコンオイルを用いた本報の実験値を示している。図中の実線は(24)式で表わされる理論値を示している。特性数

の値が 5×10^{-1} 以上では右辺の第2項に比べ第1項が無視できるため，(24)式は両対数グラフ上で直線となる。また，特性数がこの値以下では右辺第1項が無視できなくなり，(24)式は下に凸の曲線になる。実験値と理論値を比較すると，特性数の値が 10^{-1} 以下では両者の間によい一致が見られないことがわかる。

4. 結　　論

得たる結果を要約すると次の通りである。

1. 二重管内層流流れに関する理論式から，液体によって満たされた垂直管内を落下する円柱の抗力係数を算出し得たること。
2. 円柱の抗力係数 Cds は円柱と管径との比 $\bar{d}$，円柱の長さと円柱径との比 $\bar{l}$ およびレイノルズ数 Rem との関係で示されること。
3. 従来の粘度測定結果と本報理論との比較を行い，本報理論の妥当性を明らかにしたこと。
4. $\bar{d}$，$\bar{l}$ および Rem からなる特性数 $\bar{l}/(1/\bar{d}-1)^2$ Rem によって抗力係数 Cds を示すと，落体法による粘度計の設計の指針が得られること。
5. 流動性の変化する液体の粘度測定に，本報理論に基づいた落体法を用いることの妥当性がわかったこと。

本研究を基礎にして，キャビテーションによって流動性の変化した血液の粘度測定に落体法を用いる実験を今後行う予定である。

参 考 文 献

1）川田裕郎：「粘度」第3章，昭和33年，コロナ社
2）Happel, J. & Brenner, H.: Low Reynolds number hydrodynamics, pp. 341～342, (1973), dhoff
3）立花規良・吉川淳：すべり落円柱粘度計，日本レオロジー学会誌，pp. 126～134, Vol. 5, 1977.
4）Yanaida, K., J. of Pipelines, Vol. 2, No. 2, pp. 119 (1982), ELSVIER.
5）3）に同じ.