ある種のノンパラメトリック統計量の漸近分布について

ある種のノンパラメトリック統計量の漸近分布について

On the Asymptotic Distribution of some Nonparametric Statistics

清 水 行 雄* ・ 宮 本 良 雄**
Yukio SHIMIZU* and Yoshio MIYAMOTO**

(昭和58年4月13日受理)

ABSTRACT

The asymptotic Edgeworth expansion up to terms of $O(N^{-3})$ has been given for the each distribution function of some nonparametric test statistics.

For the use of approximate results, BASIC programs are added.

はじめに

ノンパラメトリック検定に使われる統計量で，分布が離散型で，漸近正規性がいえ，キュムラントを求めることができる場合，連続補正をした修正 Edgeworth 展開により，よい漸近分布をつくることができる。特に $\kappa_{2r+1}=0$，$\kappa_{2r}/\sigma^{2r}=O(N^{-r+1})$ であるとき，κ_8 までを用いて，BASIC プログラムを作成しておくと，パーソナル・コンピュータの利用により精度の良い臨界値を得ることができる。

1．修正 Edgeworth 展開

漸近正規性をもつ離散型分布 $F(u)=P_r\{U\leqq u\}=\sum_{l\leqq u}p(l)$ の修正 Edgeworth 展開は，特に，$\kappa_{2r+1}=0$，$\kappa_{2r}/\sigma^{2r}=O(N^{-r+1})$ である以下に扱った場合は

$$F(u)=\Phi(z)-\varphi(z)\left\{\frac{\kappa_4}{24\sigma^4}H_3(z)\right\}-\varphi(z)\left\{\frac{\kappa_6}{720\sigma^6}H_5(z)+\frac{\kappa_4^2}{1152\sigma^8}H_7(z)\right\}$$

$$-\varphi(z)\left\{\frac{\kappa_8}{40320\sigma^8}H_7(z)+\frac{\kappa_4\kappa_6}{17280\sigma^{10}}H_9(z)+\frac{\kappa_4^3}{82944\sigma^{12}}H_{11}(z)-\frac{1}{24\sigma^2}H_1(z)\right\}$$

$$+\varepsilon \qquad\qquad \varepsilon \text{は} O(N^{-3}) \text{ 以下}$$

である。ここで，$z=(u+0.5-\mu)/\sigma$ であり，$\Phi(z)$ と $\varphi(z)$ は規準正規分布の分布関数と密度関数であり，また κ_r は r 次キュムラント，$H_r(z)$ は Hermite 多項式である。(詳細は [W4] 宮本良雄 を参照。)

2．Wilcoxon 順位和統計量

---

* 一般教養科 (Department of General Education)

**大阪産業大学 (Osaka Industrial University)

（2．1） 統計量と検定

$$U=\sum_{i=1}^{m}R_i-m(m+1)/2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}u(X_i-Y_j),\ N=m+n$$

$H_0:F(x)=G(x),\ H_1:F(x)>G(x)$

$U\leqq c_\alpha$ ならば H_0 を棄却する。臨界値c_αは $P_r\{U\leqq c_\alpha|H_0\}\leqq\alpha$ を満たす。

（2．2） 漸化式と母関数

$$p_{m,n}(u)=\frac{m}{N}p_{m-1,n}(u-n)+\frac{n}{N}p_{m,n-1}(u)$$

ここで，$p_{m,n}(u)=P_r\{U=u\}$ $(u=0,1,\cdots,\ mn)$ である。

モーメント母関数

$$\Phi_{m,n}(t)=\left(\frac{N!}{m!\,n!}\right)^{-1}\left[\prod_{r=1}^{N}(1-e^{rt})\Big/\left\{\prod_{l=1}^{m}(1-e^{lt})\prod_{s=1}^{n}(1-e^{st})\right\}\right]$$

キュムラント母関数

$$\Psi(t)=\log\Phi_{m,n}(t)=\frac{mn}{2}t+\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{B_{2r}}{(2r)(2r)!}\left(\sum_{l=1}^{N}l^{2r}-\sum_{l=1}^{m}l^{2r}-\sum_{l=1}^{n}l^{2r}\right)\right\}t^{2r}=\kappa_1t+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\kappa_j}{j!}t^j$$

ここで，B_{2r}は Bernoulli 数である。([G1] Abramowitz and Stegun を参照。)

（2．3） キュムラント

$\kappa_1=mn/2,\ \kappa_{2r+1}=0$

$$\kappa_{2r}=\frac{B_{2r}}{2r}\left(\sum_{l=1}^{N}l^{2r}-\sum_{l=1}^{m}l^{2r}-\sum_{l=1}^{n}l^{2r}\right)$$

$$=\frac{B_{2r}}{2r}\left[\frac{1}{2r+1}\left\{B_{2r+1}(N)-B_{2r+1}(m)-B_{2r+1}(n)\right\}+(N^{2r}-m^{2r}-n^{2r})\right]$$

ここで，$B_{2r+1}(t)$ は$2r+1$次 Bernoulli 多項式である。([G1] Abramowitz and Stegun を参照。)

$\sigma^2=\kappa_2=mn(N+1)/12,\quad \kappa_{2r}/\sigma^{2r}=O(N^{-r+1})$

$$\kappa_4=-\{N^3(6N^2+15N+10)-m^3(6m^2+15m+10)-n^3(6n^2+15n+10)\}/3600$$

$$\kappa_6=\{N^3(6N^4+21N^3+21N^2-7)-m^3(6m^4+21m^3+21m^2-7)-n^3(6n^4+21n^3+21n^2-7)\}/10584$$

$$\kappa_8=-\{N^3(10N^6+45N^5+60N^4-42N^2+20)-m^3(10m^6+45m^5+60m^4-42m^2+20)-n^3(10n^6+45n^5+60n^4-42n^2+20)\}/21600$$

（2．4） 修正 Edgeworth 展開によるプログラム RANKSUM

（2．5） 正確な分布と近似分布の比較 $\alpha=0.05$

$m,\ n$	u	$P_r\{U\leqq u\}$	正規近似	$O(N^{-1})$	$O(N^{-2})$	$O(N^{-3})$	精度
10, 10	27	0.0446048	0.0444864	0.0446168	0.0446417	0.0446111	
	28	0.0525612	0.0520550	0.0525279	0.0525824	0.0525512	(1×10^{-5})
14, 14	61	0.0469341	0.0467624	0.0469289	0.0469458	0.0469344	
	62	0.0517614	0.0514301	0.0517465	0.0517726	0.0517610	(4×10^{-7})

3．Wilcoxon 符号付順位統計量

（3．1） 統計量と検定

$W^+=\sum_{i=1}^{N}u(X_i)R_i^+$

H_0:分布が0について対称，H_1:分布が対称でない（左寄り）。

$W^+\leqq c_\alpha$ ならば H_0を棄却する。臨界値 c_α は$P_r\{W^+\leqq c_\alpha|H_0\}\leqq\alpha$ を満たす。

（3．2）　漸化式と母関数

$$p_N(w)=\frac{1}{2}p_{N-1}(w-N)+\frac{1}{2}p_{N-1}(w)$$

ここで，$p_N(w)=P_r\{W^+=w\}(w=0,1,\cdots\cdots,\ N(N+1)/2)$である。

モーメント母関数

$$\Phi_N(t)=2^{-N}\prod_{l=1}^{N}(1+e^{lt})$$

キュムラント母関数

$$\Psi(t)=\log\Phi_N(t)=\frac{N(N+1)}{4}t+\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{(2^{2r}-1)B_{2r}}{(2r)(2r)!}\sum_{l=1}^{N}l^{2r}\right\}t^{2r}=\kappa_1 t+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\kappa_j}{j!}t^j$$

（3．3）　キュムラント

$\kappa_1=N(N+1)/4$，$\kappa_{2r+1}=0$

$$\kappa_{2r}=\frac{(2^{2r}-1)B_{2r}}{2r}\sum_{l=1}^{N}l^{2r}=\frac{(2^{2r}-1)B_{2r}}{2r}\left\{\frac{B_{2r+1}(N)}{2r+1}+N^{2r}\right\}$$

$\sigma^2=\kappa_2=N(N+1)(2N+1)/24$,　$\kappa_{2r}/\sigma^{2r}=O(N^{-r+1})$

$\kappa_4=-N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1)/240$

$\kappa_6=N(N+1)(2N+1)(3N^4+6N^3-3N+1)/168$

$\kappa_8=-17N(N+1)(2N+1)(5N^6+15N^5+5N^4-15N^3-N^2+9N-3)/1440$

（3．4）　修正 Edgeworth 展開によるプログラム　　SIGNEDRANK

（3．5）　正確な分布と近似分布の比較　　$\alpha=0.05$

N	w	$P_r\{W^+\leqq w\}$	正規近似	$O(N^{-1})$	$O(N^{-2})$	$O(N^{-3})$	精度
20	60	0.0486536	0.0483263	0.0486189	0.0486543	0.0486520	
	61	0.0526991	0.0521911	0.0526507	0.0526996	0.0526981	(2×10^{-6})
50	466	0.0495429	0.0493989	0.0495367	0.0495431	0.0495430	
	467	0.0505549	0.0503928	0.0505481	0.0505551	0.0505550	(1×10^{-7})

4．Kendall 順位相関統計量

（4．1）統計量と検定

$K=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}u(R_j^0-R_i^0)=\sum\sum_{i\neq j}u(R_i-R_j)u(Q_i-Q_j)$

H_0:YはXに従属でない，H_1:YはXに負従属である。

$K\leqq c_\alpha$ ならば H_0 を棄却する。臨界値 c_α は $P_r\{K\leqq c_\alpha|H_0\}\leqq\alpha$を満たす。

（4．2）　漸化式と母関数

$$p_N(k)=\frac{1}{N}p_{N-1}(k-N+1)+p_N(k+1)-\frac{1}{N}p_{N-1}(k+1)$$

ここで，$p_N(k)=P_r\{K=k\}(k=0,1,\cdots\cdots,\ N(N-1)/2)$ である。

モーメント母関数

$$\Phi_N(t)=(N!)^{-1}\prod_{l=1}^{N}\{(e^{lt}-1)/(e^t-1)\}$$

キュムラント母関数

$$\Psi(t)=\log \Phi_N(t)=\frac{N(N-1)}{4}t+\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{B_{2r}}{(2r)(2r)!}\sum_{l=1}^{N}(l^{2r}-1)\right\}t^{2r}=\kappa_1 t+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\kappa_j}{j!}t^j$$

（4．3）　キュムラント

$\kappa_1=N(N-1)/4$，　$\kappa_{2r+1}=0$

$$\kappa_{2r}=\frac{B_{2r}}{2r}\sum_{l=1}^{N}(l^{2r}-1)=\frac{B_{2r}}{2r}\left\{\frac{B_{2r+1}(N)}{2r+1}+N^{2r}-N\right\}$$

$\sigma^2=\kappa_2=N(N-1)(2N+5)/72$,　$\kappa_{2r}/\sigma^{2r}=O(N^{-r+1})$

$\kappa_4=-N(6N^4+15N^3+10N^2-31)/3600$

$\kappa_6=N(6N^6+21N^5+21N^4-7N^2-41)/10584$

$\kappa_8=-N(10N^8+45N^7+60N^6-42N^4+20N^2-93)/21600$

（4．4）　修正 Edgeworth 展開によるプログラム　　KENDALL

（4．5）　正確な分布と近似分布の比較　　$\alpha=0.05$

N	k	$P_r\{K\leqq k\}$	正規近似	$O(N^{-1})$	$O(N^{-2})$	$O(N^{-3})$	精度
20	69	0.0491652	0.0489970	0.0491928	0.0491955	0.0491659	
	70	0.0563021	0.0559434	0.0563202	0.0563334	0.0563027	(1×10^{-6})
50	513	0.0489118	0.0488366	0.0489135	0.0489138	0.0489118	
	514	0.0506472	0.0505533	0.0506484	0.0506491	0.0506471	(1×10^{-7})

5．Jonckheere k標本統計量

（5．1）　統計量と検定

$W=\sum_{i=2}^{k}U_i=\sum_{i=2}^{k}\sum_{j<i}U_{ji}$，　$N=\sum_{i=1}^{k}n_i$，　n_iは第i標本の大きさ。

ここで，U_{ji}は第i標本を第1群とし，第j標本を第2群とした Wilcoxon順位和統計量である。したがって，$U_i=\sum_{j<i}U_{ji}$ は第i標本を第1群とし，第1から第$i-1$標本を合併したものを第2群とした Wilcoxon 順位和統計量である。

$H_0:F_1(x)=F_2(x)=\cdots=F_k(x)$,　$H_1:F_1(x)\leqq F_2(x)\leqq\cdots\leqq F_k(x)$ (少なくとも1つは不等号)。

$W\leqq c_\alpha$ ならば H_0 を棄却する。臨界値 c_α は $P_r\{W\leqq c_\alpha|H_0\}\leqq\alpha$ を満たす。

（5．2）　漸化式と母関数

$$p_{n_1n_2\cdots\cdots n_l}(w)=\sum_t p_{n_1n_2\cdots\cdots n_{l-1}}(t)\,p_{n_1+\cdots\cdots+n_{l-1},\,n_l}(w-t)$$

$\sum_t$ は$\max\{0,w-(n_1+\cdots+n_{l-1})n_l\}\leqq t\leqq\min\{w,\sum_{1\leqq i<j\leqq l-1}\sum n_in_j\}$についての和．

$(l=3,4,\cdots,k)$.

ここで，$p_{n_1n_2\cdots n_k}(w)=P_r\{W=w\}$ $(w=0,1,\cdots,$　$(N^2-\sum_{i=1}^{k}n_i^2)/2)$ である。

モーメント母関数

U_iのモーメント母関数は Wilcoxon 順位和統計量のモーメント母関数と同じであるから，

$$\Phi_{U_i}(t)=\left\{\frac{(n_1+\cdots+n_i)!}{(n_1+\cdots+n_{i-1})!n_i!}\right\}^{-1}\left(\prod_{r=1}^{n_1+\cdots+n_i}(1-e^{rt})\Big/\left\{\prod_{l=1}^{n_1+\cdots+n_{i-1}}(1-e^{lt})\prod_{s=1}^{n_i}(1-e^{st})\right\}\right)$$

Wのモーメント母関数は $W=\sum_{i=2}^{k}U_i$ より

$$\Phi_W(t)=\prod_{i=2}^{k}\Phi_{U_i}(t)=\left(\frac{N!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}\right)^{-1}\left\{\prod_{r=1}^{N}(1-e^{rt})\Big/\prod_{i=1}^{k}\prod_{s=1}^{n_i}(1-e^{st})\right\}$$

キュムラント母関数

$$\Psi(t)=\log \Phi_{W}(t)=\frac{N^2-\sum_{i=1}^{k}n_i^2}{4}t+\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{B_{2r}}{(2r)(2r)!}\left(\sum_{l=1}^{N}l^{2r}-\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=1}^{n_i}s^{2r}\right)\right\}t^{2r}=\kappa_1 t+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\kappa_j}{j!}t^j$$

（5．3） キュムラント

$$\kappa_1=(N^2-\sum_{i=1}^{k}n_i^2)/4,\quad \kappa_{2r+1}=0$$

$$\kappa_{2r}=\frac{B_{2r}}{2r}\left(\sum_{l=1}^{N}l^{2r}-\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=1}^{n_i}s^{2r}\right)=\frac{B_{2r}}{2r}\left[\frac{1}{2r+1}\left\{B_{2r+1}(N)-\sum_{i=1}^{k}B_{2r+1}(n_i)\right\}+\left(N^{2r}-\sum_{i=1}^{k}n_i^{2r}\right)\right]$$

$$\sigma^2=\kappa_2=\{N^2(2N+3)-\sum_{i=1}^{k}n_i^2(2n_i+3)\}/72,\quad \kappa_{2r}/\sigma^{2r}=O(N^{-r+1})$$

$$\kappa_4=-\{N^3(6N^2+15N+10)-\sum_{i=1}^{k}n_i^3(6n_i^2+15n_i+10)\}/3600$$

$$\kappa_6=\{N^3(6N^4+21N^3+21N^2-7)-\sum_{i=1}^{k}n_i^3(6n_i^4+21n_i^3+21n_i^2-7)\}/10584$$

$$\kappa_8=-\{N^3(10N^6+45N^5+60N^4-42N^2+20)-\sum_{i=1}^{k}n_i^3(10n_i^6+45n_i^5+60n_i^4-42n_i^2+20)\}/21600$$

（5．4） 修正 Edgeworth 展開によるプログラム　JONCKHEERE

（5．5） 正確な分布と近似分布の比較　$\alpha=0.05$

k	n_i	w	$P_r\{W\leqq w\}$	正規近似	$O(N^{-1})$	$O(N^{-2})$	$O(N^{-3})$	精度
3	(2,4,7)	12	0.0440560	0.0439754	0.0441181	0.0441428	0.0440322	
		13	0.0592075	0.0582303	0.0592239	0.0593473	0.0592306	(3×10^{-5})
3	(6,7,8)	46	0.0435061	0.0434708	0.0435309	0.0435334	0.0435069	
		47	0.0500152	0.0497623	0.0500269	0.0500431	0.0500158	(8×10^{-7})
4	(7,7,7,7)	106	0.0487313	0.0485869	0.0487387	0.0487430	0.0487316	
		107	0.0530979	0.0528574	0.0531013	0.0531096	0.0530980	(3×10^{-7})

6．結び

漸化式による正確な分布計算は標本の大きさが大きくなるにしたがって計算量が増大し，計算時間がかかる。そこで，Edgeworth展開ができて各項のオーダーが漸減するとき得られる精度の良い近似分布を考えた。これらはパーソナル・コンピュータの利用により，広範囲の標本の大きさに対して簡便な数表として用いることができる。

プログラムはN－BASICで書かれ，出力例はPC8001によって計算したものである。

参考文献は，全体にわたるものとしては〔G1～4〕，2節には〔W1～4〕，3節には〔WS1～5〕，4節には〔K1～4〕，5節には〔J1～3〕を示しておくので参照されたい。

プログラム　RANKSUM

```
100 REM RANKSUM
110 REM asymptotic distribution of Wilcoxon rank sum Statistic
120 INPUT "m,n,u";N1,N2,V
130 N=N1+N2
140 IF V>N1¥N2 THEN GOTO 120
150 IF V<0 THEN GOTO 120
160 LPRINT "¥¥ m= ";N1;" n= ";N2;" ¥¥ u= ";V
170 IF V>N1¥N2/2 THEN V=N1¥N2-V
180 S=N1¥N2¥(N+1)/12
190 K4=-(((6¥N+15)¥N+10)¥N^3-((6¥N1+15)¥N1+10)¥N1^3-((6¥N2+15)¥N2+10)
¥N2^3)/(3600¥S¥S)
200 K6=((((6¥N+21)¥N+21)¥N¥N-7)¥N^3-(((6¥N1+21)¥N1+21)¥N1¥N1-7)¥N1^3-
(((6¥N2+21)¥N2+21)¥N2¥N2-7)¥N2^3)/(10584¥S^3)
210 K8=-(((((10¥N+45)¥N+60)¥N¥N-42)¥N¥N+20)¥N^3-((((10¥N1+45)¥N1+60)¥
N1¥N1-42)¥N1¥N1+20)¥N1^3-((((10¥N2+45)¥N2+60)¥N2¥N2-42)¥N2¥N2+20)¥N2^
3)/(21600¥S^4)
220 Z=(V+.5-N1¥N2/2)/S^.5
230 Y=Z¥Z
240 GOSUB 420
250 PD=.3989422804#¥EXP(-Y/2)
260 H3=(Y-3)¥Z
270 H5=((Y-10)¥Y+15)¥Z
280 H7=(((Y-21)¥Y+105)¥Y-105)¥Z
290 H9=((((Y-36)¥Y+378)¥Y-1260)¥Y+945)¥Z
300 H11=(((((Y-55)¥Y+990)¥Y-6930)¥Y+17325)¥Y-10395)¥Z
310 P1=-PD¥K4¥H3/24
320 P2=-PD¥(K6¥H5/720+K4¥K4¥H7/1152)
330 P3=-PD¥(K8¥H7/40320!+K4¥K6¥H9/17280+K4^3¥H11/82944!-Z/(24¥S))
340 LPRINT "alpha0="P0;
350 ALPHA=P1+P0
360 LPRINT "alpha1="ALPHA;
370 ALPHA=P2+P1+P0
380 LPRINT "alpha2="ALPHA;
390 ALPHA=P3+P2+P1+P0
400 LPRINT "alpha3="ALPHA
410 END
420 X=ABS(Z)
430 A=4986.7347#
440 B=2114.10061#
450 C=327.76263#
460 D=3.80036
470 E=4.88906
480 F=.5383
490 P0=((((((F¥X+E)¥X+D)¥X+C)¥X+B)¥X+A)¥X/10^5+1)^-16/2
500 IF Z>0 THEN P0=1-P0
510 RETURN
```

出力例

```
¥¥ m=  10  n=  10  ¥¥ u=  27
alpha0= .0444844 alpha1= .0446168 alpha2= .0446417 alpha3= .0446111
¥¥ m=  10  n=  10  ¥¥ u=  28
alpha0= .052055 alpha1= .0525279 alpha2= .0525824 alpha3= .0525512
¥¥ m=  14  n=  14  ¥¥ u=  41
alpha0= .0467624 alpha1= .0469289 alpha2= .0469458 alpha3= .0469344
¥¥ m=  14  n=  14  ¥¥ u=  42
alpha0= .0514301 alpha1= .0517465 alpha2= .0517726 alpha3= .051761
```

プログラム　SIGNEDRANK

```
100 REM SIGNEDRANK
110 REM asymptotic distribution of Wilcoxon signed rank statistic
120 INPUT "n,wplus";N,V
130 IF V>N*(N+1)/2 THEN GOTO 120
140 IF V<0 THEN GOTO 120
150 LPRINT "** n= ";N;" **  wplus= ";V
160 IF V>N*(N+1)/4 THEN V=N*(N+1)/2-V
170 S=N*(N+1)*(2*N+1)/24
180 K4=-((N+1)*N*3-1)/(10*S)
190 K6=(((N+2)*N*N-1)*N*3+1)/(7*S*S)
200 K8=-((((((5*N+15)*N+5)*N-15)*N-1)*N+9)*N-3)*17/(60*S^3)
210 Z=(V+.5-N*(N+1)/4)/S^.5
220 Y=Z*Z
230 GOSUB 410
240 PD=.3989422804#*EXP(-Y/2)
250 H3=(Y-3)*Z
260 H5=((Y-10)*Y+15)*Z
270 H7=(((Y-21)*Y+105)*Y-105)*Z
280 H9=((((Y-36)*Y+378)*Y-1260)*Y+945)*Z
290 H11=(((((Y-55)*Y+990)*Y-6930)*Y+17325)*Y-10395)*Z
300 P1=-PD*K4*H3/24
310 P2=-PD*(K6*H5/720+K4*K4*H7/1152)
320 P3=-PD*(K8*H7/40320!+K4*K6*H9/17280+K4^3*H11/82944!-Z/(24*S))
330 LPRINT "alpha0="P0;
340 ALPHA=P1+P0
350 LPRINT "alpha1="ALPHA;
360 ALPHA=P2+P1+P0
370 LPRINT "alpha2="ALPHA;
380 ALPHA=P3+P2+P1+P0
390 LPRINT "alpha3="ALPHA
400 END
410 X=ABS(Z)
420 A=4986.7347#
430 B=2114.10061#
440 C=327.76263#
450 D=3.80036
460 E=4.88906
470 F=.5383
480 P0=((((((F*X+E)*X+D)*X+C)*X+B)*X+A)*X/10^5+1)^-16/2
490 IF Z>0 THEN P0=1-P0
500 RETURN
```

出力例

```
** n=  20  **  wplus=  60
alpha0= .0483263 alpha1= .0486189 alpha2= .0486543 alpha3= .048652
** n=  20  **  wplus=  61
alpha0= .0521911 alpha1= .0526507 alpha2= .0526996 alpha3= .0526981
** n=  50  **  wplus=  466
alpha0= .0493989 alpha1= .0495367 alpha2= .0495431 alpha3= .049543
** n=  50  **  wplus=  467
alpha0= .0503928 alpha1= .0505481 alpha2= .0505551 alpha3= .050555
```

プログラム KENDALL

```
100 REM KENDALL
110 REM asymptotic distribution of Kendall rank correlation statistic
120 INPUT "n,k";N,V
130 IF V>N*(N-1)/2 THEN GOTO 120
140 IF V<0 THEN GOTO 120
150 LPRINT "** n= ";N;" **  k=";V
160 IF V>N*(N-1)/4 THEN V=N*(N-1)/2-V
170 S=((2*N+3)*N-5)*N/72
180 K4=-(((6*N+15)*N+10)*N*N-31)*N/(3600*S*S)
190 K6=((((6*N+21)*N+21)*N*N-7)*N*N-41)*N/(10584*S^3)
200 K8=-(((((10*N+45)*N+60)*N*N-42)*N*N+20)*N*N-93)*N/(21600*S^4)
210 Z=(V+.5-N*(N-1)/4)/S^.5
220 Y=Z*Z
230 GOSUB 410
240 PD=.3989422804#*EXP(-Y/2)
250 H3=(Y-3)*Z
260 H5=((Y-10)*Y+15)*Z
270 H7=(((Y-21)*Y+105)*Y-105)*Z
280 H9=((((Y-36)*Y+378)*Y-1260)*Y+945)*Z
290 H11=(((((Y-55)*Y+990)*Y-6930)*Y+17325)*Y-10395)*Z
300 P1=-PD*K4*H3/24
310 P2=-PD*(K6*H5/720+K4*K4*H7/1152)
320 P3=-PD*(K8*H7/40320!+K4*K6*H9/17280+K4^3*H11/82944!-Z/(24*S))
330 LPRINT "alpha0="P0;
340 ALPHA=P1+P0
350 LPRINT "alpha1="ALPHA;
360 ALPHA=P2+P1+P0
370 LPRINT "alpha2="ALPHA;
380 ALPHA=P3+P2+P1+P0
390 LPRINT "alpha3="ALPHA
400 END
410 X=ABS(Z)
420 A=4986.7347#
430 B=2114.10061#
440 C=327.76263#
450 D=3.80036
460 E=4.88906
470 F=.5383
480 P0=((((((F*X+E)*X+D)*X+C)*X+B)*X+A)*X/10^5+1)^-16/2
490 IF Z>0 THEN P0=1-P0
500 RETURN
```

出力例

```
** n=  20  **  k= 69
alpha0= .048997 alpha1= .0491928 alpha2= .0491955 alpha3= .0491659
** n=  20  **  k= 70
alpha0= .0559434 alpha1= .0563202 alpha2= .0563334 alpha3= .0563027
** n=  50  **  k= 513
alpha0= .0488366 alpha1= .0489135 alpha2= .0489138 alpha3= .0489118
** n=  50  **  k= 514
alpha0= .0505533 alpha1= .0506484 alpha2= .0506491 alpha3= .0506471
```

プログラム　JONCKHEERE

```
100 REM JONCKHEERE
110 REM asymptotic distribution of Jonckheere k-sample statistic
120 READ K
130 LPRINT "** k= ";K;" ** n= ";
140 DIM M(K)
150 FOR I=1 TO K
160 READ M(I)
170 N=N+M(I)
180 LPRINT M(I);
190 NEXT I
200 MU=N*N
210 FOR I=1 TO K
220 MU=MU-M(I)*M(I)
230 NEXT I
240 MU=MU/4
250 INPUT "w";V
260 IF V>2*MU THEN GOTO 250
270 IF V<0 THEN GOTO 250
280 J=2*V-2*MU
290 LPRINT " ** w= ";V;" ** j= ";J
300 IF V>MU THEN V=2*MU-V
310 S=(2*N+3)*N*N
320 K4=-((6*N+15)*N+10)*N^3
330 K6=(((6*N+21)*N+21)*N*N-7)*N^3
340 K8=-((((10*N+45)*N+60)*N*N-42)*N*N+20)*N^3
350 FOR I=1 TO K
360 S=S-(2*M(I)+3)*M(I)*M(I)
370 K4=K4+((6*M(I)+15)*M(I)+10)*M(I)^3
380 K6=K6-(((6*M(I)+21)*M(I)+21)*M(I)*M(I)-7)*M(I)^3
390 K8=K8+((((10*M(I)+45)*M(I)+60)*M(I)*M(I)-42)*M(I)*M(I)+20)*M(I)^3
400 NEXT I
410 S=S/72
420 K4=K4/(3600*S*S)
430 K6=K6/(10584*S^3)
440 K8=K8/(21600*S^4)
450 Z=(V+.5-MU)/S^.5
460 Y=Z*Z
470 GOSUB 650
480 PD=.3989422804#*EXP(-Y/2)
490 H3=(Y-3)*Z
500 H5=((Y-10)*Y+15)*Z
510 H7=(((Y-21)*Y+105)*Y-105)*Z
520 H9=((((Y-36)*Y+378)*Y-1260)*Y+945)*Z
530 H11=(((((Y-55)*Y+990)*Y-6930)*Y+17325)*Y-10395)*Z
540 P1=-PD*K4*H3/24
550 P2=-PD*(K6*H5/720+K4*K4*H7/1152)
560 P3=-PD*(K8*H7/40320!+K4*K6*H9/17280+K4^3*H11/82944!-Z/(24*S))
570 LPRINT "alpha0="P0;
580 ALPHA=P1+P0
590 LPRINT "alpha1="ALPHA;
600 ALPHA=P2+P1+P0
610 LPRINT "alpha2="ALPHA;
620 ALPHA=P3+P2+P1+P0
630 LPRINT "alpha3="ALPHA
640 END
650 X=ABS(Z)
660 A=4986.7347#
670 B=2114.10061#
680 C=327.76263#
690 D=3.80036
700 E=4.88906
710 F=.5383
720 P0=((((((F*X+E)*X+D)*X+C)*X+B)*X+A)*X/10^5+1)^-16/2
730 IF Z>0 THEN P0=1-P0
740 RETURN
1000 DATA 4
1010 DATA 7,7,7,7
```

出力例

```
¥¥ k= 3  ¥¥ n=  2  4  7  ¥¥ w=  12  ¥¥ j= -26
alpha0= .0439754 alpha1= .0441181 alpha2= .0441428 alpha3= .0440322
¥¥ k= 3  ¥¥ n=  2  4  7  ¥¥ w=  13  ¥¥ j= -24
alpha0= .0582303 alpha1= .0592239 alpha2= .0593473 alpha3= .0592306
¥¥ k= 3  ¥¥ n=  6  7  8  ¥¥ w=  46  ¥¥ j= -54
alpha0= .0434708 alpha1= .0435309 alpha2= .0435334 alpha3= .0435069
¥¥ k= 3  ¥¥ n=  6  7  8  ¥¥ w=  47  ¥¥ j= -52
alpha0= .0497623 alpha1= .0500269 alpha2= .0500431 alpha3= .0500158
¥¥ k= 4  ¥¥ n=  7  7  7  7  ¥¥ w=  106  ¥¥ j= -82
alpha0= .0485869 alpha1= .0487387 alpha2= .048743 alpha3= .0487316
¥¥ k= 4  ¥¥ n=  7  7  7  7  ¥¥ w=  107  ¥¥ j= -80
alpha0= .0528574 alpha1= .0531013 alpha2= .0531096 alpha3= .053098
```

参 考 文 献

[G1] Abramowitz, M. and Stegun, I.A. (1970) Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, Dover, 804-810

[G2] 山内二郎 (1972) 統計数値表, 日本規格協会

[G3] 竹内啓 (1975) 確率分布の近似, 教育出版

[G4] 柴田義貞 (1981) 正規分布 特性と応用, 東京大学出版会

[W1] Mann, H.B. and Whitney, D.R. (1947) On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other, Ann. Math. Stat. 18,50-60

[W2] Wilcoxon, F., Katti, S.K. and Wilcox, R.A. (1973) Critical values and probability levels for the Wilcoxon rank sum test and the Wilcoxon signed rank test, Selected Tables in Math. Stat. I, 171-174, 177-235

[W3] Kendall, M.G. and Stuart, A. (1977) The Advanced Theory of Statistics II, 520-523

[W4] 宮本良雄 (1981) Wilcoxon 統計量の漸近分布について, 鳥取大学教養部紀要, 15, 147-173

[WS1] Benard, A. and Constance van E. (1956) Handleiding voor de symmetrietoets van Wilcoxon, Rapport S 208 (M76) Math. Centrum Amsterdam

[WS2] Fellingham, S.A. and Stoker, D.J. (1964) An approximation for the exact distribution of the Wilcoxon test for symmetry, J.A.S.A. 59,899-905

[WS3] Wilcoxon, F., Katti, S.K. and Wilcox, R.A. (1973) Critical values and probability levels for the Wilcoxon rank sum test and the Wilcoxon signed rank test, Selected Tables in Math. Stat. I, 174-176, 237-259

[WS4] Claypool, P.L. and Holbert, D. (1974) Accuracy of normal and Edgeworth approximations to the distribution of the Wilcoxon signed rank statistic, J.A.S.A. 69,255-258

[WS5] Chow, W.K. and Hodges, Jr.J.L. (1975) An approximation for the distribution of the Wilcoxon one-sample statistic, J.A.S.A. 70, 648-655

[K1] Silverstone, H. (1950) A note on the cumulants of Kendall's S-distribution, Biometrika, 37,231-235

[K2] David, S.T., Kendall, M.G. and Stuart, A. (1951) Some questions of distribution in the theory of rank correlation, Biometrika, 38,131-140

[K3] Kendall, M.G. and Stuart, A. (1977) The Advanced Theory of Statistics II, 503-507

[K4] Albers, W. (1978) A note on the Edgeworth expansion for the Kendall rank correlation coefficient, Ann. Stat. 6,923-925

[J1] Jockheere, A.R. (1954) A distribution-free k-sample test against ordered alternatives, Biometrika, 41, 133-145

[J2] Odeh, R.E. (1971) On Jonckheere's k-sample test against ordered alternatives, Technometrics, 13, 912-918

[J3] Kendall, M.G. and Stuart, A. (1977) The Advanced Theory of Statistics II, 532-533