



運動方程式に基づく進行波動中における単一粒子の挙動に関する研究 (1)

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2013-11-08 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 平山, 秀夫 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.24729/00008080

運動方程式に基づく進行波動中における
単一粒子の挙動に関する研究 (I)*

Behavior of a Solid Particle Based on the Equation of Motion
under Oscillatory Motion of Progressive Waves (I)

平 山 秀 夫**

Hideo HIRAYAMA***

(昭和54年9月3日受理)

Abstract

For investigating the mechanics of sediment suspension in water waves, the present paper deals with the characteristics of the behavior of a solid particle based on the equation of motion under oscillatory motion of progressive waves. Namely, the velocities and orbits of the solid particle have been examined numerically by using both Tchen's equation and Corrsin & Lumley's equation under the oscillatory motion of progressive waves described by the potential wave theory and compared with the results already calculated by using the finite difference method, and also with those of the analytical method computed by using the perturbation method and experimental results.

It is shown that the experimental results of the motions of the solid particle under the oscillatory motion of progressive waves in a wave tank with closed end, as a whole, tend to well agree with the curves calculated by using Corrsin & Lumley's equation and those of the finite difference method under the potential wave theory based on the second definition of the wave celerity.

1. 緒 論

昭和48年の石油危機に続いて、今やまた石油問題が再燃し、世界は正しくエネルギー資源をめぐって揺れ動いており、各国とも省エネルギー政策を打出すなどその対策に苦慮していることは周知のとおりである。このように、大陸での資源の涸渇が顕在化する中で、広大なスペースと膨大な資源を有する海洋をいかにして人類のために利用開発するかということが、石油に代る代替エネルギーの開発とともに世界の注目を浴びている。このような意味から大陸棚を中心とした沿岸海域の適切な利用と開発は、以前にも増してその重要性が認識され、海洋開発の名の下に急速にその方面の

*本論文の1部は、土木学会第33回年次学術講演会(昭和53年度)で講演したものである。

**土木工学科

***Department of Civil Engineering.

研究に力点が置かれるようになってきている。

しかし一方、沿岸地帯は常に波浪や潮流などの外力の脅威にさらされており、場合によっては、津波・高潮・海岸侵食といった異常な海象災害に見舞れ、われわれの社会生活に甚大な被害をもたらすことがしばしばあり、その防止軽減対策も同時に考えなければ片手落ちとなると言うことは昔うまでもない。

ここでは、これらの海象災害のうち、海岸侵食や港湾の埋没あるいは海浜の変形などと言った、いわゆる漂砂災害をいかにして防止軽減するかということにその究極の目的をおくものであるが、そのためには、まず波浪下での漂砂の動態（浮遊と輸送）を明確にするとともに、漂砂量そのものの時・空間的変動量などをも定量的に把握することが不可欠となってくる。

著者は、これまですでに、漂砂現象に関する基礎的研究として、波浪下での底質の浮遊問題に関して種々の検討をしてきている。^{1)~6)} 特に前報では、底質の浮遊機構を解明するためには、波動中における単一粒子の挙動特性を把握する必要があるという観点から、単一粒子の運動をその基礎運動方程式に基づいて考察するための第1歩として、まず基礎式中の Basset 項をはじめ各項の重力項に対する比などを重複波動中における実験結果を用いて求め、それらの影響の程度を調べた。

本研究では、前報に引き続いて、単一粒子の運動をその運動方程式に基づいて考察しようとするもので、ここでは特に速度場が進行波のポテンシャル波動理論で表現できると仮定した場合の波動中における単一粒子の速度や軌跡を、従来提案されている Tchen や Corrsin²⁾ & Lumley の式に基づいて求め、これらを従来著者が示した差分法および解析的解法による結果や実験結果とも比較し、進行波動中における単一粒子の挙動の特性を色々な角度から詳しく調べようとするものである。

2. 単一粒子の運動に関する基礎方程式とその差分化

1) Tchenの基礎式に基づく場合

Tchen⁷⁾は速度場が無限領域で一様であるという仮定の下に変動速度 v_f で運動する流体中での球状個体粒子の運動方程式を前報の式(1)のように示した。ここでは、前報の結果からその式中の Basset 項を省略し、かつ抵抗係数 C_D を Stokes の抵抗則にならって $C_D = 24\alpha/R_0$ ($R_0 = (v_0 - v_f)/\nu$, α : 任意定数) のように仮定し、さらに、その基礎式を水平および鉛直方向成分に分けて表示すれば、それぞれ次式のように表わされる。

$$M \frac{du_p}{dt} = m \frac{du_f}{dt} - \frac{1}{2} m \left(\frac{du_p}{dt} - \frac{du_f}{dt} \right) - 3\alpha\pi\mu d(u_p - u_f) \dots\dots\dots (1)$$

$$M \frac{dw_p}{dt} = m \frac{dw_f}{dt} - \frac{1}{2} m \left(\frac{dw_p}{dt} - \frac{dw_f}{dt} \right) - 3\alpha\pi\mu d(w_p - w_f) - g(M - m) \dots\dots\dots (2)$$

ただし、上式中の下付 f は fluid, p は particle の特性を示し、 M は単一粒子の質量、 m はそれと同体積の水粒子の質量、 d は粒子の直径、 μ は粘性係数 ($\approx 1.029 \times 10^{-5} \text{ g} \cdot \text{sec}/\text{cm}^2$) を示す。なお、ここで用いた単一粒子は比重1.04、直径2.4mm、沈降速度約3.0cm/secの球状スチロール樹脂である。

いま、時刻 i および $i-1$ での単一粒子の水平および鉛直速度をそれぞれ $(u_p)_i$, $(u_p)_{i-1}$ および $(w_p)_i$, $(w_p)_{i-1}$ として式(1)および(2)の差分化を行えば、 $(u_p)_i$ および $(w_p)_i$ はそれぞれ次式のよう

$$(u_p)_i = \frac{(M + \frac{1}{2}m) \frac{(u_p)_{i-1}}{\Delta t} + \frac{3}{2}m \frac{du_f}{dt} - \frac{3}{2}\alpha\pi\mu d(u_p)_{i-1} + 3\alpha\pi\mu d \cdot u_f}{(M + \frac{1}{2}m) / \Delta t + 1.5\alpha\pi\mu d} \dots\dots\dots (3)$$

$$(w_p)_i = \frac{(M + \frac{1}{2}m) \frac{(w_p)_{i-1}}{\Delta t} + \frac{3}{2}m \frac{dw_f}{dt} - \frac{3}{2}\alpha\pi\mu d(w_p)_{i-1} + 3\alpha\pi\mu d w_f - g(M-m)}{(M + \frac{1}{2}m) / \Delta t + 1.5\alpha\pi\mu d} \dots\dots\dots (4)$$

なお、上式で $\alpha=1.0$ とおいた結果が、 $R_e \leq 1$ の場合における Tchen⁷⁾ の結果である。

2) Corrsin & Lumley の基礎式に基づく場合

Corrsin & Lumley⁸⁾ は、速度が時空間的に変動する場合の粒子の運動方程式を前報の式(2)のように提案したが、この式中の $(v_p)_j \frac{\partial (v_p)_i}{\partial x_j}$ の $(v_p)_j$ を水平方向には $(v_p)_j = u_f$ 、鉛直方向では $(v_p)_j = w_o + w_f$ (w_o : 沈降速度) と仮定すれば、1) の場合と同様にして水平および鉛直方向の運動方程式はそれぞれ次式のように表わされる。

$$(M + \frac{1}{2}m) \frac{du_p}{dt} = m \left\{ \frac{3}{2} \frac{D(u_f)}{Dt} - \nu \nabla^2(u_f) \right\} - 3\alpha\pi\mu d(u_p - u_f) \dots\dots\dots (5)$$

$$(M + \frac{1}{2}m) \frac{dw_p}{dt} = m \left\{ \frac{3}{2} \frac{D(w_f)}{Dt} - \nu \nabla^2(w_f) + \frac{1}{2}w_o \frac{\partial w_f}{\partial z} \right\} - 3\alpha\pi\mu d(w_p - w_f) - g(M-m) \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $D/Dt = \partial/\partial t + u_f \partial/\partial x + w_f \partial/\partial z$ 、 $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$ である。これらの式を1) と全く同様にして差分化すれば、この場合の $(u_p)_i$ および $(w_p)_i$ はそれぞれ次式のように求まる。

$$(u_p)_i = \frac{(M + \frac{1}{2}m) \frac{(u_p)_{i-1}}{\Delta t} + m \left\{ \frac{3}{2} \frac{D u_f}{Dt} - \nu \nabla^2(u_f) \right\} + 3\alpha\pi\mu d u_f - 1.5\alpha\pi\mu d (u_p)_{i-1}}{(M + \frac{1}{2}m) / \Delta t + 1.5\alpha\pi\mu d} \dots\dots\dots (7)$$

$$(w_p)_i = \frac{(M + \frac{1}{2}m) \frac{(w_p)_{i-1}}{\Delta t} + m \left\{ \frac{3}{2} \frac{D(w_f)}{Dt} + \frac{1}{2}w_o \frac{\partial w_f}{\partial z} - \nu \nabla^2(w_f) \right\} - 1.5\alpha\pi\mu d w_f}{(M + \frac{1}{2}m) / \Delta t + 1.5\alpha\pi\mu d} - \frac{g(M-m) - 1.5\alpha\pi\mu d (w_p)_{i-1}}{(M + \frac{1}{2}m) / \Delta t + 1.5\alpha\pi\mu d} \dots\dots\dots (8)$$

なお、上式で $\alpha=1.0$ とおいた結果が $R_e \leq 1$ の場合における Corrsin & Lumley⁸⁾ の結果である。

3. 単一粒子の速度・軌跡の計算法

1) 波動場の表現

以上に示した式(3)と(4)および式(7)と(8)を用いて、逐次、単一粒子の速度および軌跡を求めていくのであるが、この場合、波動場の速度成分 u_r, w_r と解析始点での単一粒子の運動速度の値(初期条件)が既知であることが必要になってくる。したがって、ここでは、波動場の表現としては次に示すように、微小振幅波理論および波速の第2定義に基づく Stokes 波の第2次近似解による結果の両者の場合について検討した。

微小振幅波理論によれば、波動場の水粒子の水平および鉛直方向の速度成分 (u_r, w_r) はそれぞれ次式のように表わされる。

$$u_r = -\frac{\pi H}{T} \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \sin(kx - \sigma t) \dots\dots\dots (9)$$

$$w_r = \frac{\pi H}{T} \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \cos(kx - \sigma t) \dots\dots\dots (10)$$

ただし、ここで、 $\sigma = 2\pi/T$ (T : 波の周期)、 $k = 2\pi/L$ (L : 波長) である。

一方、波速の第2定義に基づく Stokes 波の第2次近似解によれば、(u_r, w_r) はそれぞれ次式のように与えられる。

$$u_r = -\frac{\pi H}{T} \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh} \sin(kx - \sigma t) - \frac{3H^2 \sigma k \cosh 2k(h+z)}{16 \sinh^4 kh} \cos 2(kx - \sigma t) - \frac{\sigma H^2}{8h} \coth kh \dots\dots\dots (11)$$

$$w_r = \frac{\pi H}{T} \frac{\sinh k(h+z)}{\sinh kh} \cos(kx - \sigma t) - \frac{3H^2 k \sigma \sinh 2k(h+z)}{16 \sinh^4 kh} \sin 2(kx - \sigma t) \dots\dots\dots (12)$$

2) 初期条件

いま、単一粒子は解析始点 ($t = 0$) では、水平方向には水粒子と同じ速度で鉛直方向には水粒子と同じ速度にさらに静水中での単一粒子の沈降速度 ($w_o: w_o < 0$) を加えた和の速度で運動すると仮定する。すなわち、 $t = 0$ での単一粒子の位置の座標を ($0, z_o$) とすれば、そのときの単一粒子の水平および鉛直速度の初期値 ($u_r)_o, (w_r)_o$ はそれぞれ次式のように表わされる。

$$(u_r)_o = 0 \dots\dots\dots (13)$$

$$(w_r)_o = \pi H \sinh k(h+z_o) / (T \sinh kh) + w_o \dots\dots\dots (14)$$

以下では、これらの式(13), (14)を初期条件として式(3), (4)および式(7), (8)を用いて、 $\Delta t = 0.02$ sec 間隔ごとに、逐次単一粒子の速度と位置の座標を求めた。

4. 解析結果および考察

1) 単一粒子の水平速度

図-1(1), (2)は3. で示した方法に基づいて計算した単一粒子の水平速度の例を, 任意定数 α (抵抗係数の変化を表す)をパラメータとして図示したもので, 横軸は解析始点からの経過時間(t/T : T は波の周期)を表す。図の(1)はTchenの基礎式に基づく場合の結果, (2)はCorrsin & Lumleyの基礎式に基づく場合の結果で, 両者の場合とも波動場の表現としては式(11)および(12)によった。これらの図から明らかなように, $\alpha=1$ のいわゆる Stokes の抵抗則を用いる場合には, 理論値と実験値との差異は顕著であるが, α の値の増大につれてその差異は小さくなり, $\alpha \approx 4 \sim 5$ のときが, 最も両者は合致しており, しかも, 同じ波動理論の下では, Tchen と Corrsin & Lumley の式の間での差異もあまり見られないようである。なお, ここでは示していないが, 波動理論として微小振幅波理論を用いた場合にも, ほぼ類似な傾向が見られるが, 後述するように, 実験値との適合性から見れば, 波速の第2定義に基づく Stokes 波を用いる場合がより実験値を説明できるようである。

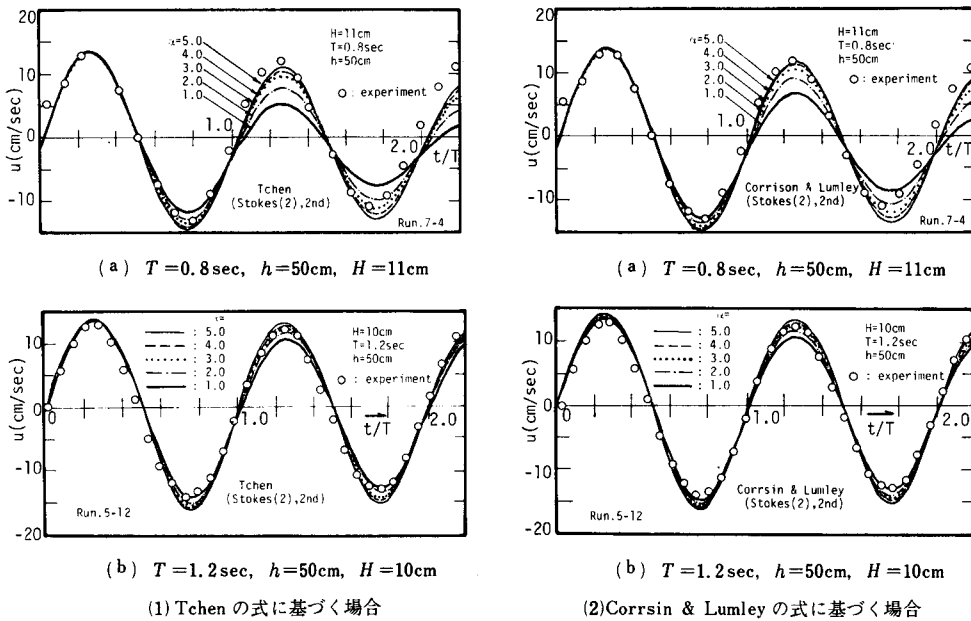
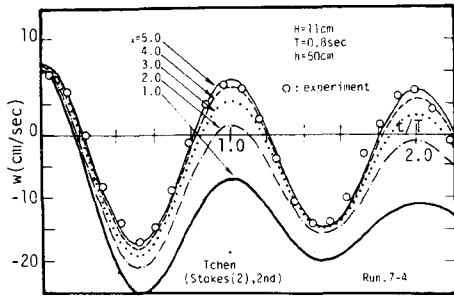


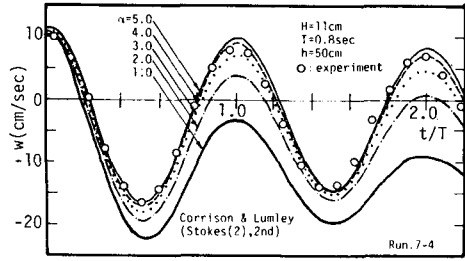
図-1 単一粒子の水平速度

2) 単一粒子の鉛直速度

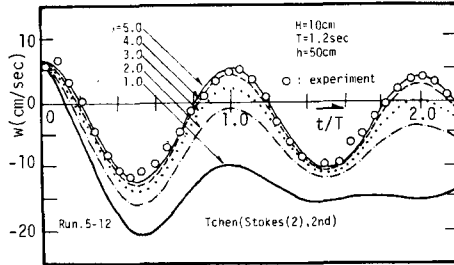
図-2(1), (2)は図-1の場合と全く同じ条件下での鉛直速度成分の代表例について示したもので, それぞれ図の(1)はTchenの式, (2)はCorrsin & Lumleyの式に基づく場合の結果である。これらの図から明らかなように, 鉛直速度成分の場合にも, 全般的には図-1の場合とほぼ同様な傾向が見られ, $\alpha=1$ の Stokes の抵抗則を用いる場合には, 理論値と実験値との差異は著しいが, $\alpha \approx 4 \sim 5$



(a) $T=0.8 \text{ sec}$, $h=50 \text{ cm}$, $H=11 \text{ cm}$

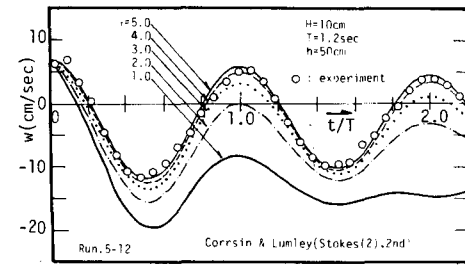


(a) $T=0.8 \text{ sec}$, $h=50 \text{ cm}$, $H=11 \text{ cm}$



(b) $T=1.2 \text{ sec}$, $h=50 \text{ cm}$, $H=10 \text{ cm}$

(1) Tchen の式に基づく場合



(b) $T=1.2 \text{ sec}$, $h=50 \text{ cm}$, $H=10 \text{ cm}$

(2) Corrsin & Lumley の式に基づく場合

図-2 単一粒子の鉛直速度

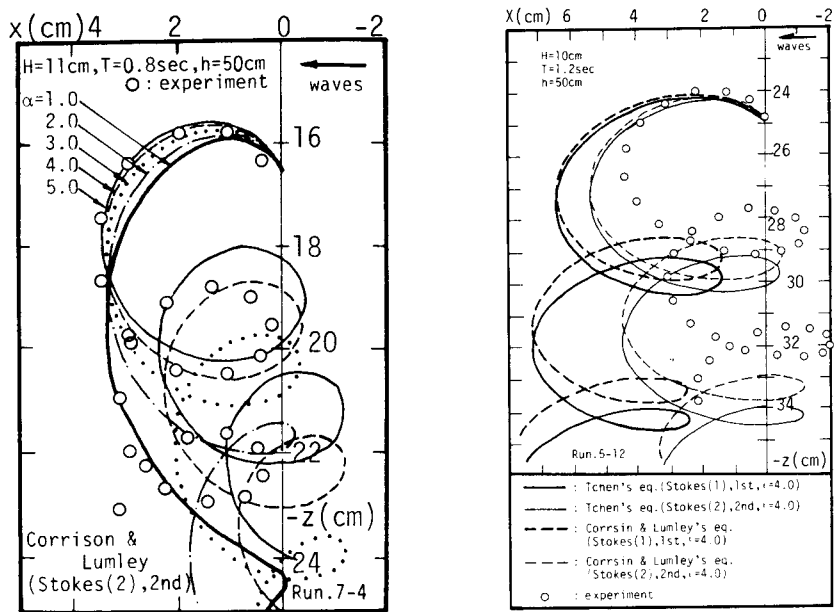
になれば両者はほぼ合致してくるようになる。一方、 α の値の変化に対する速度の変化の割合は、鉛直速度成分の場合が、水平速度成分のそれに比して著しいようである。このことは、波動中における単一粒子の運動に作用する抵抗項の役割が、水平方向のそれに比べて鉛直方向がより重要であるということを意味しているものと思われる。事実、ここでは示していないが、 α の値を水平および鉛直方向とも $\alpha = 5$ とおいた場合の結果と、水平方向では $\alpha = 1$ および鉛直方向では $\alpha = 5$ とおいて計算した速度の結果とは、両者にほとんど差異がなかったことを付記しておく。

3) 単一粒子の軌跡

図-3(1), (2), (3)は単一粒子の軌跡の理論曲線と実験値とを比較したもので、横軸に解析始点からの距離、縦軸に静水面からの距離をとって示したものである。

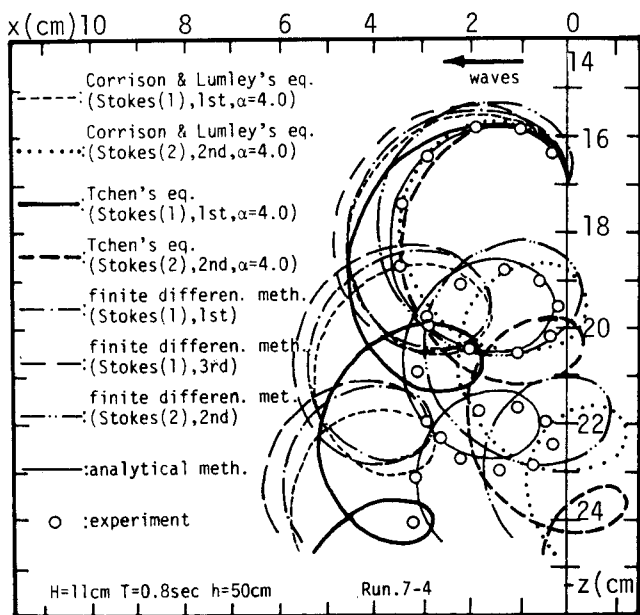
図の(1)は、図-1(2)の(a)および図-2(2)の(a)の場合と全く同じ条件下での波速の第2定義に基づく Stokes 波による Corrsin & Lumley の式に基づく場合の結果を α をパラメータとして示したもので、この図から、抵抗係数の変化による単一粒子の軌跡の変化の様子が明らかであろう。すなわち、 α の値の変化に応じて単一粒子の軌跡は水平および鉛直方向とも変化し、中でも特に鉛直方向の変化の程度が顕著で、 $\alpha = 1$ の場合の Stokes の抵抗則を適用した場合の理論曲線は全く実験値を説明できないが、 α の値の増大とともに理論曲線と実験値とはほぼ合致するようになり、前述の速度成分の場合と同様、 $\alpha \approx 4 \sim 5$ のときが最も両者は合致しているようである。

一方、図の(2)は、適用する波動理論の相違によって軌跡の理論曲線にどの程度の差異があるかを、Tchen の式に基づく場合の結果 (図中実線) と Corrsin & Lumley の式に基づく場合の結果 (図中



(1) 抵抗項の変化による単一粒子の軌跡の変化

(2) 波動理論の相違による軌跡の理論曲線の変化



(3) 単一粒子の軌跡の種々の理論曲線と実験値との比較

図-3 単一粒子の軌跡の理論値と実験値の比較

破線)に分けて示したもので、このときの α の値は理論値と実験値との適合性が最もよいと思われる $\alpha=4.0$ のときの値を選んだ。この図から明らかなように、単一粒子の運動軌跡は用いる基礎式や波動理論の相違によってかなりの差異が存在し、特に波動場の表現の相違によって粒子の運動軌跡の傾向が著しく異なっているようである。すなわち、波動場が微小振幅波理論で表わされる場合には、単一粒子の運動軌跡は粒子の沈降とともに波の進行方向に前進し、実験値との対応もよくないのに対して、波速の第2定義に基づく Stokes 波を用いる場合には、単一粒子は逆に波の進行方向とは反対向きに運動し、しかも実験値との対応もかなりよいことが明らかである。このことから、本実験のように端部を有する実験水槽内での波動場の表現としては、波速の第2定義に基づく Stokes 波を用いる方が、より実際現象を説明できるようである。

図の(3)は、以上に示した運動方程式に基づく場合の単一粒子の軌跡の理論結果を、著者がこれまでに示した差分法および解析的解法に基づく結果や実験値と比較した代表例を示したものである。この図から明らかなように、前述したように、用いる波動理論の相違によって各理論曲線の傾向は異なるが、同一の波動理論の下では、各曲線はほぼ類似な傾向を示し、この場合には、どちらかと言えば、実験値は解析的解法の結果にかなりよく合致しているが、一般的には、波速の第2定義に基づく Stokes 波による、従来の差分法および Corrsin & Lumley の式に基づく結果がより実際現象を説明しているようである。

5. 結 論

以上、単一粒子の運動方程式に基づいて、進行波動中における単一粒子の挙動特性を、特に速度と軌跡に主眼をおいて詳しく調べてきた。その結果を要約すれば、次のようである。

1) 本実験のように沈降速度による粒子レイノルズ数が1より大きい場合の単一粒子の運動は、Stokes の抵抗則を適用した Tchen や Corrsin & Lumley の基礎式では全く表わしえなく、少なくとも本実験条件の範囲内では、抵抗係数 C_D を $C_D=24\alpha/Re$ ($\alpha \approx 4 \sim 5$) のように与えた場合の結果が最もよく実験値と合致するようである。

2) 本実験のように、端部を有する普通の波浪水槽中での波動場の表現としては、少なくとも微小振幅波理論よりは波速の第2定義に基づく Stokes 波理論による結果を用いた方が、より実験値との対応がよいようである。

3) 波動場での単一粒子の運動を表わす基礎運動方程式としては、Tchen が提案した式よりも Corrsin & Lumley の式に基づく場合の結果がより実際現象を説明しているようである。

4) 本研究で得られた運動方程式に基づく結果を、従来の差分法や解析的解法による結果と比較した場合、同一の波動理論の下ではこれら三者ともほぼ類似な傾向を示すが、実験値との適合性から判断すれば、一般的に波速の第2定義に基づく Stokes 波による、従来の差分法および Corrsin & Lumley の式に基づく結果が、より実験値との対応がよいようである。

以上、単一粒子の速度と軌跡に限定して解析結果を示したが、この他、単一粒子の残留速度の鉛直方向の変化などに関しても興味ある結果を得ている。これらに関しては、ここでは省略したが、新たに別の機会に発表することにする。

最後に、本研究を実施するにあたり、終始、暖かい御指導を賜った京都大学工学部・岩垣雄一教授、御助言を賜った京都大学防災研究所土屋義人教授に心から感謝の意を表するとともに、本研究

は、文部省科学研究費自然災害特別研究(1) (研究代表者：岩垣雄一京大教授) による研究の1部であることを付記し、謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 岩垣雄一・平山秀夫：重複波による底質の浮遊に関する研究，第23回海岸工学講演会論文集，pp. 183～188，1976.
- 2) 平山秀夫：進行波における単一粒子の挙動に関する研究，第24回海岸工学講演会論文集，pp. 5～9，1977.
- 3) 平山秀夫：波浪水槽中における進行波による単一粒子の残留速度に関する研究，第25回海岸工学講演会論文集，pp. 23～27，1978.
- 4) Hirayama, H.: Behavior of a solid particle under oscillatory motion of progressive waves, Coastal Engineering in Japan, Vol.21, pp. 1～11, 1978.
- 5) Hirayama, H. : Effects of the Basset term on the motions of a spheric solid particle under oscillatory motion of waves, Bulletin of O. P. T. C., Vol, 12, pp. 77～85, 1978.
- 6) 平山秀夫：斜面上の波動中における単一粒子の残留速度に関する研究，第26回海岸工学講演会論文集，pp. 1～5，1979.
- 7) Tchen, C. M. : Mean value and correlation problems connected with the motion of small particles suspended in a turbulent fluid, Dissertation Delft, 1947, Martinus Nijhoff, the Hague.
- 8) Corrsin, S. and J. Lumley : On the equation of motion for a particle in turbulent fluid, Appl. Sci. Res. Section A, Vol. 6, pp. 114～116, 1956.
- 9) 岡村隆：進行波による質量輸送に関する基礎的研究，京都大学工学研究科修士学位論文，51p., 1972.